Segunda Prova de Teoria Eletromagnética I, 30/05/2011

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(3,0 pontos)* Considere uma distribuição discreta constituída de 3 partículas em repouso com cargas individuais q e cujos vetores posição são dados, repectivamente, por $\vec{r}_1 = L\,\hat{x}$, $\vec{r}_2 = L\,\hat{y}$ e $\vec{r}_3 = L\,\hat{z}$, onde L é uma constante.

(a) *(1,5 pontos)* Determine os momentos de monopolo e dipolo elétrico da distribuição de cargas.

(b) *(1,5 pontos)* Considere a expressão geral da expansão de multipolos para o potencial elétrico $V(\vec{r})$ de uma distribuição localizada de cargas com densidade $\rho(\vec{r}\,')$ em um volume $\mathcal{V}$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{\mathcal{V}}(r')^n P_n(\cos\theta')\rho(\vec{r}\,')d\tau'\,,$$

onde θ' é o ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, com o polinômio de Legendre $P_n(\cos\theta')$ sendo obtido através fórmula de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\,n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n.$$

A partir das expressões acima, escreva a expansão multipolar para $V(\vec{r})$ contendo até (e inclusive) o termo de dipolo no caso específico da distribuição discreta considerada no enunciado dessa questão em função de q, L e $\vec{r}$.

(2ª questão) *(4,0 pontos)*

Um dipolo elétrico com momento de dipolo $\vec{p} = p\hat{z}$ está orientado perpendicularmente a um plano condutor infinito aterrado (isto é, mantido em potencial elétrico $V = 0$). O dipolo está na posição $(0, 0, d)$, com $d > 0$, podendo ser aproximado como um dipolo puro. O plano se encontra na posição $z = 0$, coincidindo com o plano xy.

(a) *(1,0 ponto)* Determine o potencial $V(x, y, z)$ em toda a região $z \geq 0$ pelo método das imagens, verificando que o problema-imagem satisfaz as condições de contorno do problema original. Expresse $V(x, y, z)$ em termos de p, d e das coordenadas (x, y, z).

(b) *(1,0 ponto)* Calcule a densidade superficial de carga induzida no plano condutor.

(c) *(1,0 ponto)* Calcule a carga total induzida no plano condutor.

(d) *(1,0 ponto)* Calcule a força que o plano condutor faz sobre o dipolo. **Dica**: a força sobre um dipolo em um campo não-uniforme pode ser calculada através da expressão $\vec{F} = \left(\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{E}$, onde $\vec{E}$ é o campo sobre o dipolo.

(3ª questão) *(3,0 pontos)*

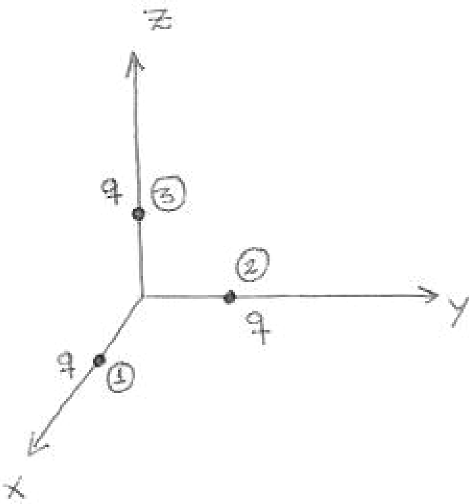
Considere uma esfera dielétrica de raio R uniformemente polarizada, com polarização $\vec{P} = P\,\hat{z}$.

(a) *(1,0 ponto)* Determine as densidades de carga de polarização (superficial e volumétrica) em termos de P e de θ, onde θ é o ângulo entre o semi-eixo positivo z e o vetor posição $\vec{r}$.

(b) *(2,0 pontos)* Determine o campo elétrico $\vec{E}$ dentro e fora da esfera.

$\boxed{P2 - 2011/1}$ - $\boxed{\text{GABARITO}}$

(1ª Questão)



$$\vec{r_1} = L\hat{x}$$
$$\vec{r_2} = L\hat{y}$$
$$\vec{r_3} = L\hat{z}$$

(a) Momento de monopolo: $Q = q + q + q \Rightarrow \boxed{Q = 3q}$ (0,5 ponto)

Momento de dipolo: $\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} q_i \vec{r_i} \Rightarrow \boxed{\vec{p} = qL(\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})}$

(1,0 ponto)

(b) $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V (r')^n P_n(\cos\theta') \rho(\vec{r}') d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \underbrace{\int_V \rho(\vec{r}') d\tau'}_{Q}}_{\text{Termo de monopolo}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \int_V r' \cos\theta' \rho(\vec{r}') d\tau'}_{\text{Termo de dipolo}} + \dots \right]$$ (0,5 ponto)

Mas $\int_V r' \cos\theta' \rho \, d\tau' = \int_V \cancel{r'} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r \cancel{r'}} \rho \, d\tau' = \hat{r} \cdot \vec{p}$, com $\vec{p} = \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') d\tau'$

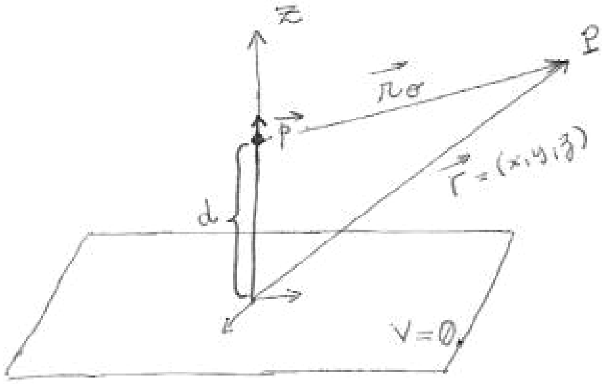
Momento de dipolo.

No caso discreto, obtemos $\vec{p} = \sum_{i=1}^{3} \vec{r_i} q_i$ (0,5 ponto)

Assim: $$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2} + \dots \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{3q}{r} + \frac{qL(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}) \cdot \hat{r}}{r^2} \right] + \dots}$$ (0,5 ponto)

(2ª QUESTÃO)



- $\vec{p} = (0,0,p)$
- $\vec{r_\sigma} = \vec{r} - \vec{r_\sigma}'$, com $\vec{r_\sigma}' = (0,0,d)$.

a) $V(x,y,z)$ na região $z \geq 0$: Substituímos o plano condutor por um dipolo-imagem $\vec{p}$ na posição $(0,0,-d)$. Assim:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}_\sigma}{r_\sigma^2} + \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}_I}{r_I^2}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p(z-d)}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{p(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}\right]$$

(0,5 ponto)

onde usamos que $\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{r}}{r^3}$.

(0,2 ponto)

0,3 ponto

Verificando as condições de contorno:

- $z=0$: $V(x,y,z)=0$. De fato: $V(x,y,0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cancel{\frac{-pd}{[x^2+y^2+d^2]^{3/2}}} + \cancel{\frac{pd}{[x^2+y^2+d^2]^{3/2}}}\right] = 0$
- $x^2+y^2+z^2 \gg d^2$: $V \to 0$. De fato: Nesse caso os denominadores em $V(x,y,z)$ levarão a $V \to 0$.

b) 0,5 ponto

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z\to 0}$$

Mas
$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{3/2}} + \frac{p}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}} + \frac{(-\frac{3}{\cancel{2}})\cancel{2}p(z-d)^2}{[x^2+y^2+(z-d)^2]^{5/2}} + \frac{(-\frac{3}{\cancel{2}})\cancel{2}p(z+d)^2}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{5/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma(x,y) = \frac{-p}{2\pi}\left[\frac{1}{[x^2+y^2+d^2]^{3/2}} - \frac{3d^2}{[x^2+y^2+d^2]^{5/2}}\right]}$$ (0,5 ponto)

(2ª Questão)

c)

0,5 ponto

$$q_{IND} = \int \sigma\, da = \int \sigma(x,y)\, dx\, dy$$

Em coordenadas polares:

$$q_{IND} = -\frac{p}{\cancel{2\pi}}\left[\cancel{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(\underbrace{r^2+d^2}_{u})^{3/2}}\overbrace{r\,dr}^{du/2} - 3d^2\,\cancel{2\pi}\int_0^\infty \frac{1}{(\underbrace{r^2+d^2}_{u})^{5/2}}\overbrace{r\,dr}^{du/2}\right]$$

0,5 ponto

$$q_{IND} = -p\left[\frac{1}{\cancel{2}}\frac{u^{-1/2}}{(-1/\cancel{2})}\Bigg|_{d^2}^{\infty} - \cancel{3}d^2\,\frac{1}{\cancel{2}}\frac{u^{-3/2}}{(-\cancel{3}/\cancel{2})}\Bigg|_{d^2}^{\infty}\right] = -p\left[-\frac{1}{\sqrt{d^2}} + \frac{d^2}{(d^2)^{3/2}}\right]$$

$$q_{IND} = -p\left[-\cancel{\frac{1}{d}} + \cancel{\frac{1}{d}}\right] \Rightarrow \boxed{q_{IND} = 0}$$

d)

0,5 ponto

Força sobre o dipolo: $\vec{F} = (\vec{p}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} = p\,\frac{\partial \vec{E}(0,0,z)}{\partial z}\Big|_{z=d}$

Mas $\vec{E} = -\vec{\nabla}V_{IMAGEM}$, onde V_{IMAGEM} é o potencial produzido pelo dipolo-imagem.

$$V_{IMAGEM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(z+d)}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}}$$

0,5 ponto

$$\frac{\partial V_{IMAGEM}}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(z+d)(-3/2)\,2x}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{5/2}} \quad ; \quad \frac{\partial V_{IMAGEM}}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p(z+d)(-3/2)\,2y}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{5/2}}$$

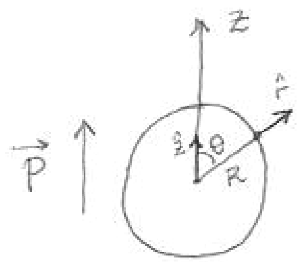
$$\frac{\partial V_{IMAGEM}}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{3/2}} + \frac{(-3/\cancel{2})\,\cancel{2}p(z+d)^2}{[x^2+y^2+(z+d)^2]^{5/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{E}(0,0,z) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p}{(z+d)^3} - \frac{3p}{(z+d)^3}\right]\hat{z} = +\frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(z+d)^3}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = +\frac{p^2}{2\pi\varepsilon_0}(-3)(z+d)^{-4}\Big|_{z=d}\hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\frac{3p^2}{32\pi\varepsilon_0 d^4}\hat{z}}$$

→ Força atrativa entre o plano e o dipolo.

(3ª Questão)



$\vec{P} = P\hat{z}$

(a) $\rho_b = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$ (Densidade volumétrica de carga de polarização é nula)

(0,5 ponto)

$\sigma_b = \vec{P}\cdot\hat{n} = P\hat{z}\cdot\hat{r} = P\cos\theta$ (Densidade superficial de carga de polarização se distribui em termos de $\cos\theta$).

(0,5 ponto)

(b) Esfera dielétrica uniformemente polarizada $\longmapsto$ Casca esférica com densidade superficial $\sigma_b = P\cos\theta$

Potencial: $$\left[\begin{array}{l} V_{DENTRO}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos\theta) \\ V_{FORA}(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell r^{-(\ell+1)} P_\ell(\cos\theta) \end{array}\right.$$

Continuidade do potencial: $V_{DENTRO}(R,\theta) = V_{FORA}(R,\theta) \Rightarrow \boxed{B_\ell = A_\ell R^{2\ell+1}}$

Descontinuidade do campo: $\left(\frac{\partial V_{FORA}}{\partial r} - \frac{\partial V_{DENTRO}}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} = -\sigma_b/\varepsilon_0$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\left[A_\ell R^{2\ell+1}(-\ell-1)R^{-\ell-2} - A_\ell\,\ell\,R^{\ell-1}\right]P_\ell(\cos\theta) = -P\cos\theta/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell(2\ell+1)R^{\ell-1}P_\ell(\cos\theta) = P\cos\theta/\varepsilon_0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1 = P/3\varepsilon_0 \\ A_\ell = 0 \ (\ell\neq 1)\end{array}\right.$$

(3ª Questão)

(b) (1,0 ponto)

$$V_{DENTRO}(r,\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} r\cos\theta = \frac{P}{3\varepsilon_0} z$$

$$V_{FORA}(r,\theta) = \frac{P}{3\varepsilon_0} R^3 r^{-2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p\cos\theta}{r^2}, \text{ com } p = P\frac{4\pi R^3}{3}$$

(momento de dipolo da esfera)

$$\Rightarrow \vec{E}_{DENTRO} = -\vec{\nabla} V_{DENTRO} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\hat{z}$$ (campo uniforme no interior)

(0,5 ponto)

$$\vec{E}_{FORA} = -\vec{\nabla} V_{FORA} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\text{sen}\theta}{r^3}\hat{\theta}\right]$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[2\cos\theta\,\hat{r} + \text{sen}\theta\,\hat{\theta}\right]$$

(campo de dipolo puro no exterior)

(0,5 ponto)

—— " —— " ——